



# Sommaire

Matrice . . . . .	2
Matrice ligne, matrice colonne . . . . .	2
Matrice transposée . . . . .	2
Matrice carrée . . . . .	3
Matrice diagonale . . . . .	3
Matrice nulle . . . . .	3
Matrice identité . . . . .	4
Matrice triangulaire . . . . .	4
Égalité de deux matrices . . . . .	4
Matrice somme . . . . .	5
Commutativité de l'addition . . . . .	5
Multiplication par un réel . . . . .	5
Distributivité . . . . .	6
Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne . . . . .	6
Multiplication d'une matrice par une matrice colonne . . . . .	6
Multiplication de deux matrices . . . . .	7
Puissance d'une matrice . . . . .	8
Puissance d'une matrice diagonale . . . . .	8
Matrice inverse . . . . .	8
Écriture matricielle d'un système . . . . .	9
Matrice de Léontief . . . . .	10
Complément 1 : Utilisation de XCAS . . . . .	12

## DÉFINITION

### Matrice

Une **matrice** est un tableau contenant différentes valeurs de nombres, que l'on « encadre » par des parenthèses.

Si le tableau a  $n$  lignes et  $p$  colonnes, on dira que la matrice est de **dimension**  $n \times p$ .

Les nombres de la matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

## EXEMPLES

**1**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  est une matrice de dimension  $2 \times 3$ .

**2**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  est une matrice de dimension  $3 \times 2$ .

## NOTATION

Quand on parle d'une matrice  $A$  de dimension  $n \times p$ , il est commun de noter  $a_{ij}$  le coefficient situé à la  $i^{\text{e}}$  ligne et  $j^{\text{e}}$  colonne.

On écrit alors  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ . Si  $n = p$ , on peut écrire  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  ou plus simplement  $A = (a_{ij})$  s'il ne peut pas y avoir d'ambiguïté.

## DÉFINITIONS

### Matrice ligne, matrice colonne

- Une **matrice ligne** est une matrice à 1 ligne.
- Une **matrice colonne** est une matrice à 1 colonne.

## EXEMPLES

**1**  $(1 \ 0 \ -1 \ 4)$  est une matrice ligne.

**2**  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est une matrice colonne.

## DÉFINITION

### Matrice transposée

La **transposée** d'une matrice  $A$ , de dimension  $n \times p$ , est la matrice notée  ${}^tA$ , de dimension  $p \times n$ , obtenue à partir de  $A$  en faisant en sorte que les lignes de  $A$  deviennent les colonnes de  ${}^tA$ .

**EXEMPLE**

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ , alors  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

**DÉFINITION***Matrice carrée*

Une **matrice carrée** est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.  
Si  $n$  est le nombre de lignes et colonnes, on dit que la matrice est d'**ordre**  $n$ .

**EXEMPLES**

**1**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée d'ordre 2.

**2**  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée d'ordre 3.

**DÉFINITION***Matrice diagonale*

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale (du haut/gauche vers le bas/droit).

**EXEMPLES**

**1**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale.

**2**  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale.

**DÉFINITION***Matrice nulle*

La **matrice nulle** de dimension  $n \times p$  est la matrice où tous les coefficients sont nuls.

### EXEMPLE

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice nulle de dimension  $2 \times 3$ .

### DÉFINITION

*Matrice identité*

La **matrice identité d'ordre  $n$**  est la matrice carrée diagonale d'ordre  $n$  où tous les coefficients non nuls sont égaux à 1.

### EXEMPLES

**1**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 2.

**2**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 3.

### REMARQUE

Il est commun de noter  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

### DÉFINITIONS

*Matrice triangulaire*

Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée où tous les coefficients au-dessous de la diagonale principale sont nuls.

Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice carrée où tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

### EXEMPLES

**1**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  est une matrice triangulaire supérieure.

**2**  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  est une matrice triangulaire inférieure.

### PROPRIÉTÉ

*Égalité de deux matrices*

Deux matrices  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  sont égales si :

- elles ont la même dimension ;
- pour tout  $i$  et  $j$ ,  $a_{ij} = b_{ij}$ .

**EXEMPLE**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 3 & 1+y \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ z-1 & 1-y^2 \end{pmatrix}$ .  
Déterminer  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour que  $A = B$ .

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = x^2 \\ 3 = z-1 \\ 1+y = 1-y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ z = 4 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \text{ou} & x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ z = 4 \\ y = 0 & \text{ou} & y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 4 matrices  $A$  possibles.

**DÉFINITION**

*Matrice somme*

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de même dimension.  
On définit la **matrice somme** de  $A$  et  $B$  par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

**EXEMPLE**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+(-5) & 2+2 \\ -1+3 & 3+(-8) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**PROPRIÉTÉ**

*Commutativité de l'addition*

- Pour toute matrice  $A$ , en notant  $O$  la matrice nulle de même dimension que  $A$ , on a :

$$A + O = O + A = A.$$

- Pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de même dimension,

$$A + B = B + A.$$

**PROPRIÉTÉ***Multiplication par un réel*

Soit  $k$  un nombre réel et soit  $A$  une matrice.

Alors,

$$kA = (k \times a_{ij}).$$

(On multiplie tous les coefficients de  $A$  par  $k$ ).

**EXEMPLE**

Si  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ , alors :

$$2A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

**PROPRIÉTÉ***Distributivité*

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de même dimension, et soit  $k$  un nombre réel.

Alors,

$$k(A + B) = kA + kB.$$

**DÉFINITION***Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne*

Soit  $A$  une matrice ligne de dimension  $1 \times n$  et soit  $B$  une matrice colonne de dimension  $n \times 1$ .

Le produit de  $A$  par  $B$  est une matrice de dimension  $1 \times 1$  définie par :

$$\begin{aligned} AB &= (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{n1}b_{1n}). \end{aligned}$$

**EXEMPLE**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} &= (2 \times (-3) + (-1) \times (-2) + 3 \times 5) \\ &= (-6 + 2 + 15) \\ &= (11). \end{aligned}$$

**MÉTHODE***Multiplication d'une matrice par une matrice colonne*

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le produit de A par X est défini comme suit :

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} -1 \times 7 + 2 \times (-5) + 1 \times 4 \\ 3 \times 7 + (-5) \times (-5) + 0 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 - 10 + 4 \\ 21 + 25 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -13 \\ 46 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**DÉFINITION***Multiplication de deux matrices*

Soient A, une matrice de dimension  $n \times p$ , et B, une matrice de dimension  $p \times m$ .

La matrice produit AB est obtenue en multipliant chaque vecteur ligne de A par chaque vecteur colonne de B.

**EXEMPLE**

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times 5 + 2 \times 6 + (-3) \times 4 & (-1) \times 7 + 2 \times (-3) + (-3) \times (-4) \\ (-2) \times 5 + 0 \times 6 + 1 \times 4 & (-2) \times 7 + 0 \times (-3) + 1 \times (-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**PROPRIÉTÉ**

Soit A une matrice carrée d'ordre  $n$  et soit  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Alors,

$$AI_n = I_n A = A.$$



Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, on peut calculer le produit AB et le produit BA, mais dans un cas général,

$$AB \neq BA.$$

### PROPRIÉTÉS

Soient A, B et C telles que leurs sommes et leur produits existent.  
Alors,

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $A \times (kB) = (kA) \times B = k(A \times B)$ , où  $k \in \mathbb{R}$

### NOTATION

*Puissance d'une matrice*

Soit A une matrice carrée et  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Alors, on notera :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

### PROPRIÉTÉ

*Puissance d'une matrice diagonale*

Soit D une matrice diagonale d'ordre  $n$ , dont les coefficients sont notés  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .  
Alors,

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}.$$

### EXEMPLE

Soit  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Alors,  $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ .

### DÉFINITION

*Matrice inverse*

Soit A une matrice carrée d'ordre  $n$ .

On définit la **matrice inverse** de A (quand elle existe) par la matrice notée  $A^{-1}$  telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$



**REMARQUE**

Si la matrice de A existe, on dit que A est inversible.

**EXEMPLE**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Posons alors  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  (en supposant qu'elle existe).

Alors,

$$\begin{aligned} AA^{-1} = I_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8x + 5z & 8y + 5t \\ 3x + 2z & 3y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5z = 1 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 8y + 5t = 0 \\ 3y + 2t = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 10z = 2 \\ 15x + 10z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 16y + 10t = 0 \\ 15y + 10t = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = -5 \\ t = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier que  $AA^{-1} = I_2$  et que  $A^{-1}A = I_2$ .

**DÉFINITION**

*Écriture matricielle d'un système*

On considère le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$AX = B \quad , \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**REMARQUE**

Nous avons vu le cas où le système avait 2 équations et 2 inconnues, mais ceci reste valable pour un nombre d'équations et d'inconnues supérieur.

### PROPRIÉTÉ

Un système linéaire d'écriture matricielle  $AX=B$  admet une unique solution si la matrice  $A$  est inversible.

Dans ce cas, la solution est donnée par le vecteur colonne :

$$X = A^{-1}B.$$

### DÉMONSTRATION

On démontre ce résultat de la façon suivante :

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow I_n X = A^{-1}B, \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité} \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

### EXEMPLE

On considère le système : 
$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 2 \\ 2x + y + z = -1. \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

On pose alors :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel (XCAS, voir « Bonus 1 »), on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} \end{pmatrix}.$$

La solution du système est le vecteur colonne :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} \\ \frac{28}{13} \\ -\frac{21}{13} \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que  $x = -\frac{10}{13}$ ,  $y = \frac{28}{13}$  et  $z = -\frac{21}{13}$ .

**DÉFINITION***Matrice de Léontief*

On considère un pays virtuel, sans échange extérieur, partagé en 2 secteurs. Chaque secteur consomme des productions de l'autre et éventuellement une partie de sa propre production : ces consommations sont appelées **consommations intermédiaires**. Le reste correspond à la **consommation finale** (ou **demande**).

On nomme  $x$  la production du secteur 1 et  $y$  celle du secteur 2.

On pose :

$$A = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

où  $c_{ij}$  représente la consommation intermédiaire du secteur  $i$  sur le secteur  $j$ , la **matrice technologique**, ou **matrice des coefficients techniques**, ou encore **matrice d'échanges**.

En notant :

$$D = \begin{pmatrix} x - (c_{11} + c_{12}) \\ y - (c_{21} + c_{22}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

la relation « production = consommations intermédiaires + consommation finale » se traduit par l'égalité matricielle :

$$X = AX + D \quad \text{ou encore} \quad (I_2 - A)X = D.$$

On en déduit alors que si  $(I_2 - A)$  est inversible, alors :

$$X = (I_2 - A)^{-1}D.$$

**EXEMPLE**

Une économie comporte deux secteurs de production : l'acier et l'électricité.

La production d'un euro d'acier nécessite : 0,3 euro d'acier et 0,2 euro d'électricité.

La production d'un euro d'électricité nécessite : 0,5 euro d'acier et 0,1 euro d'électricité. Les demandes des consommateurs correspondent à 200 000 € d'acier et 500 000 € d'électricité.

Soit  $x$  la quantité d'acier et  $y$  la quantité d'électricité à produire, exprimées milliers d'euros.

Si  $x$  représente la production totale d'acier, on a (en milliers d'euros) :

$$x = \underbrace{0,3x + 0,5y}_{\text{consommations intermédiaires}} + \underbrace{200}_{\text{demande}}.$$

De même,

$$y = 0,2x + 0,1y + 500.$$

On peut alors poser :

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$X = (I_2 - A)^{-1}D \approx \begin{pmatrix} 811,321 \\ 735,849 \end{pmatrix} \quad (\text{calculs effectués sur Xcas}).$$

## Complément 1: Utilisation de XCAS

Le logiciel XCAS est gratuit et permet d'effectuer des opérations sur les matrices.

### Définir une matrice

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Pour la définir dans XCAS, on tape :

```
A:=[[-1,5],[0,2]]
```

### Trouver l'inverse d'une matrice

```
B:=inv(A)
```

Ici, le logiciel nous retourne la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

### Trouver le produit de deux matrices

```
A*B;B*A
```

Ici, le logiciel nous retourne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deux fois (le point-virgule sert à effectuer deux opérations à la suite), ce qui nous montre que B est l'inverse de A.

### Trouver la somme de deux matrices

```
A+B
```

Ici, le logiciel nous retourne la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$